Örnek: $\tan x + \cot x - \frac{4\sqrt{3}}{3} = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

$$\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{4\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

$(\sin x)$ $(\cos x)$

$$\Rightarrow \frac{1}{\frac{\sin 2x}{2}} = \frac{4\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \cancel{2} \cdot \frac{3}{\underset{2}{\cancel{4}}\sqrt{3}} = \sin 2x \Rightarrow \sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

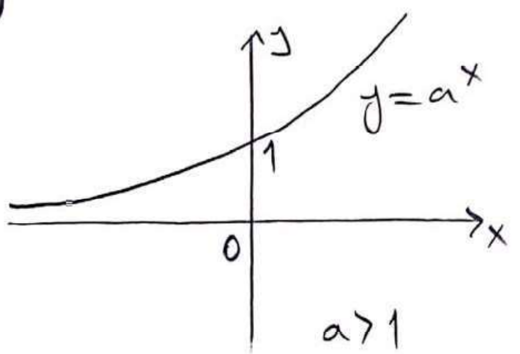
$$\Rightarrow \sin 2x = \sin \frac{\pi}{3} \Rightarrow 2x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ veya } 2x = \underbrace{\pi - \frac{\pi}{3}}_{\frac{2\pi}{3}} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

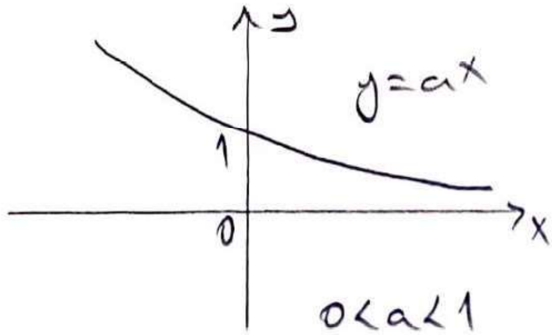
$$\Rightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\pi \text{ veya } x = \frac{\pi}{3} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow ÇK = \{x \in \mathbb{R} : \frac{\pi}{6} + k\pi \text{ veya } x = \frac{\pi}{3} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$$

Üstel - Logaritma Fonksiyonları

Tanım: $a \in \mathbb{R}^+$, $a \neq 1$ olmak üzere $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = a^x$ fonksiyonuna üstel fonksiyon, a sayısına ise üstel fonksiyonun tabanı denir.





Üstel fonksiyonun tanımı ve grafikleri göz önüne alınırsa şu özellikler ifade edilebilir:

1) Üstel fonksiyonun tanım kümesi $\mathbb{R}$ dir. O halde, $a^{g(x)}$ şeklindeki bir üstel fonksiyonun tanım kümesi bulunurken; $a \in \mathbb{R}^+$, $a \neq 1$ ve $g(x) \in \mathbb{R}$ durumları incelenmelidir.

Örnek: $f(x)=2^{\frac{1}{x^2-49}}$ fonksiyonunun tanım kümesini bulalım:

$\frac{1}{x^2-49}\in\mathbb{R} \Rightarrow x^2-49\neq 0 \Rightarrow x\neq\mp 7 \Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{\mp 7\}$

2) Her $x\in\mathbb{R}$ için $f(x)=a^x>0$ olur. O halde $-5\in\mathbb{R}$ için $a^x\neq -5$ olacağından $f(x)=a^x$ fonksiyonu örten değildir.

Uyarı: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$, $f(x)=a^x$ şeklinde tanımlanırsa $f(x)=a^x$ örten olur.

3) $f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow a^{x_1}=a^{x_2} \Rightarrow a^{x_1-x_2}=1 \Rightarrow x_1-x_2=0 \Rightarrow x_1=x_2$

$\Rightarrow f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=a^x$ birebirdir.

4) $f(x)=a^x$, $a>1$ için fonksiyonun grafiğine bakılırsa, x değerleri büyüdükçe fonksiyonun aldığı değerler de büyümektedir. O halde, $a>1$ için üstel fonksiyon artandır. Benzer şekilde, $0<a<1$ için üstel fonksiyon azalandır.

Örnek: $2^{5x-1}>2^{x+7}$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulalım.

$a=2>1$ olduğu için üstel fonksiyon artandır.

$\Rightarrow 5x-1>x+7 \Rightarrow 4x>8 \Rightarrow x>2 \Rightarrow ÇK=(2,\infty)$

Örnek: $\left(\frac{1}{2}\right)^{3x+1}>\left(\frac{1}{2}\right)^{x-5}$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulalım.

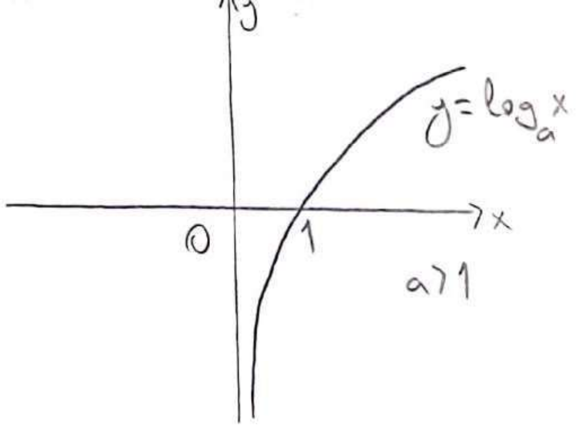
$a=\frac{1}{2}<1$ olduğundan üstel fonksiyon azalandır.

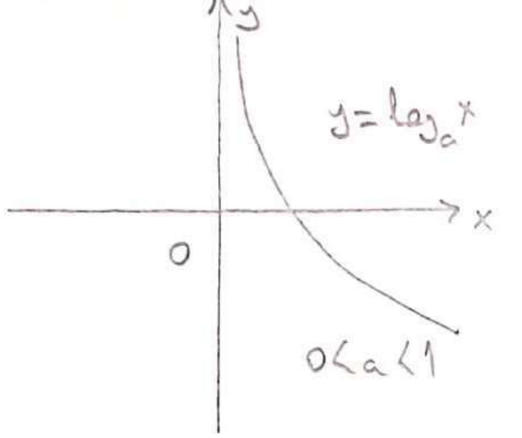
$\Rightarrow 3x+1<x-5 \Rightarrow 2x<-6 \Rightarrow x<-3 \Rightarrow ÇK=(-\infty,-3)$

Tanım: $a\in\mathbb{R}^+$, $a\neq 1$, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$, $f(x)=a^x$ şeklinde tanımlanan üstel fonksiyonun tersine logaritma fonksiyonu denir.

$\log_a:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$, $y=\log_a x$ şeklinde tanımlanır.

$\Rightarrow y=\log_a x \Leftrightarrow x=a^y$.





Logaritma fonksiyonunun özellikleri:

1) Logaritma fonksiyonunun tanım kümesi $\mathbb{R}^+$ dır. O halde $\log_a f(x)$ şeklinde bir fonksiyonun tanım kümesi incelenirken $a \in \mathbb{R}^+$, $a \neq 1$, $f(x) > 0$ özellikleri incelenmelidir.

Örnek: $f(x) = \log_5 (x^2 - 3x + 2)$ fonksiyonunun tanım kümesini bulalım:

$x^2 - 3x + 2 > 0 \Rightarrow (x-2)(x-1) > 0 \Rightarrow$

x		1		2	
$x-1$	$-$	0	$+$		$+$
$x-2$	$-$		$-$	0	$+$
x^2-3x+2	$+$		$-$		$+$

$\Rightarrow D_f = (-\infty, 1) \cup (2, \infty)$

2) $\log_a 1 = 0$

3) $\log_a a = 1$

4) $\log_a a^x = x$, $\quad a^{\log_a x} = x$

5) Her $x, y \in \mathbb{R}^+$ için $\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$

6) Her $x, y \in \mathbb{R}^+$ için $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$.

7) Her $x \in \mathbb{R}^+$, $r \in \mathbb{R}$ için $\log_a x^r = r \log_a x$.

8) Her $x \in \mathbb{R}^+$ için $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$ (Taban değiştirme özelliği)

$\Rightarrow (\log_a b) \log_b a = 1$ ve $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$

9) Logaritmanın tabanı olarak e alınırsa logaritma fonksiyonuna doğal logaritma denir ve $\log_e x$ yerine $\ln x$ gösterimi kullanılır.

Taban değiştirme özelliği kullanılırsa

$$\log_a x = \frac{\log_e x}{\log_e a} = \frac{\ln x}{\ln a}$$

olur. Eğer taban 10 olarak alınırsa logaritma fonksiyonuna adi logaritma denir ve $\log_{10} x$ yerine $\log x$ gösterimi kullanılır.

$$\Rightarrow \log x = \frac{\ln x}{\ln 10}$$

10) $\log_a x$ in grafiğine bakılırsa $a>1$ için

$$0<x<1 \Rightarrow \log_a x<0$$

$$1<x \Rightarrow \log_a x>0$$

dır. Benzer şekilde $0<a<1$ için

$$0<x<1 \Rightarrow \log_a x>0$$

$$1<x \Rightarrow \log_a x<0$$

dır.

Örnek: $\log_2(x^2-3x+3)>0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulalım:

$2>0 \Rightarrow \log_2(x^2-3x+3)>0$ olması için $x^2-3x+3>1$ olmalı

$\Rightarrow x^2-3x+2>0 \Rightarrow (x-2)(x-1)>0 \Rightarrow ÇK=(-\infty,1)\cup(2,\infty)$

Örnek: $\log_{1/3}(5x-1)>0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulalım:

$0<\frac{1}{3}<1 \Rightarrow \log_{1/3}(5x-1)>0$ olması için $0<5x-1<1$ olmalı

$\Rightarrow 1<5x<2 \Rightarrow \frac{1}{5}<x<\frac{2}{5} \Rightarrow Ç.K=\left(\frac{1}{5},\frac{2}{5}\right)$

11) $\log_a x$ in grafiğine bakarsak;

$a>1 \Rightarrow x$ ler büyüdükçe $\log_a x$ de büyüyor

$\Rightarrow \log_a x$ artandır.

$0<a<1 \Rightarrow x$ ler büyüdükçe $\log_a x$ küçülüyor

$\Rightarrow \log_a x$ azalandır.

Örnek: $a=\ln 2$, $b=\ln 3$, $c=\ln 5$ ise $\ln 1080$ in a,b,c cinsinden değerini bulalım.

$$\ln 1080=\ln(2^3 3^3 5)=\ln 2^3+\ln 3^3+\ln 5=3\ln 2+3\ln 3+\ln 5$$
$$=3a+3b+c$$

Örnek: $f(x)=\ln\dfrac{x-1}{x+1}$ fonksiyonunun tanım kümesini bulalım:

$\dfrac{x-1}{x+1}>0 \Rightarrow$

x		-1		1	
$x-1$	$-$		$-$	0	$+$
$x+1$	$-$	0	$+$		$+$
$\frac{x-1}{x+1}$	$+$		$-$		$+$

$\Rightarrow TK=(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$

Örnek: $5^{\ln x}+5^{1-\ln x}=6$ denkleminin çözüm kümesini bulalım:

$$5^{\ln x}+\frac{5}{5^{\ln x}}-6=0. \quad 5^{\ln x}=t \text{ olsun.}$$

$$\Rightarrow t+\frac{5}{t}-6=0 \Rightarrow t^2-6t+5=0 \Rightarrow (t-5)(t-1)=0$$

$$\Rightarrow t=5,\ t=1 \Rightarrow 5^{\ln x}=5,\ 5^{\ln x}=1 \Rightarrow \ln x=1,\ \ln x=0$$

$$\Rightarrow x=e\ ,\ x=1 \Rightarrow ÇK=\{1,e\}.$$

Hiperbolik fonksiyonlar

Simetrik bir küme üzerinde tanımlanan her fonksiyonu biri çift diğeri tek olan iki fonksiyonun toplamı olarak ifade edebiliriz. Gerçekten de

$$g(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}\ ,\quad h(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}$$

olmak üzere

$$f(x)=g(x)+h(x)$$

şeklinde yazılabilir. Burada $g(-x)=g(x)$ ve $h(-x)=-h(x)$ olup g çift, h ise tek fonksiyondur.

Tanım: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x$ fonksiyonunun çift kısmına yani $\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ fonksiyonuna hiperbolik kosinüs fonksiyonu, tek kısmına, yani $\dfrac{f(x)-f(-x)}{2}=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ fonksiyonuna